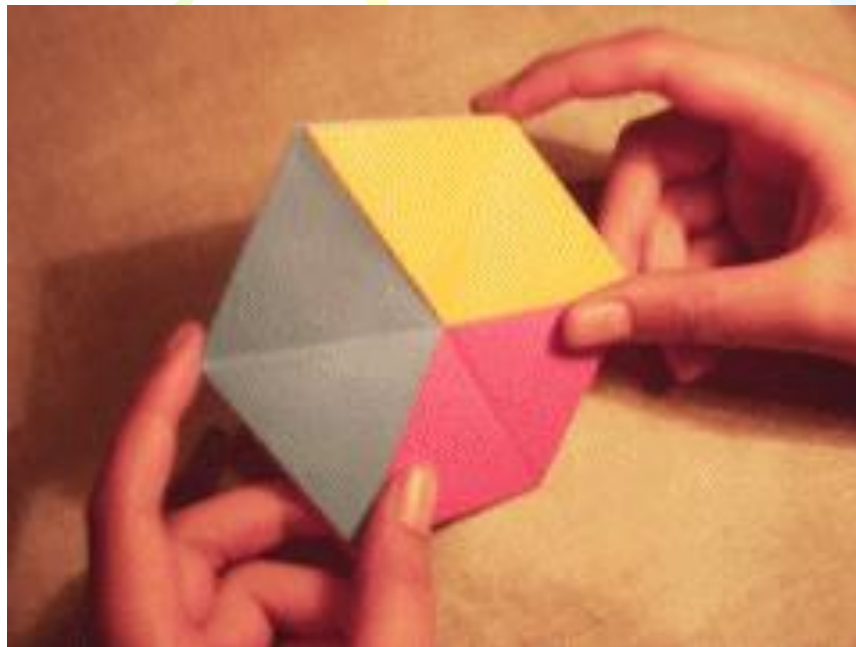


Флексатон



загадочный мир флексагонов - бумажных игрушек, обладающих поразительной способностью внезапно менять свою форму и цвет...

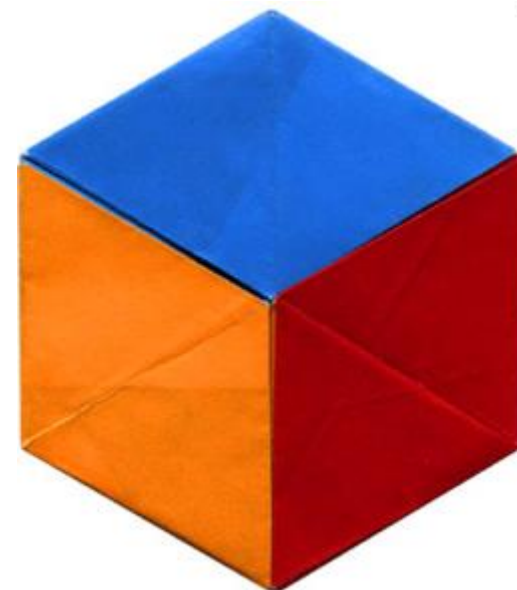
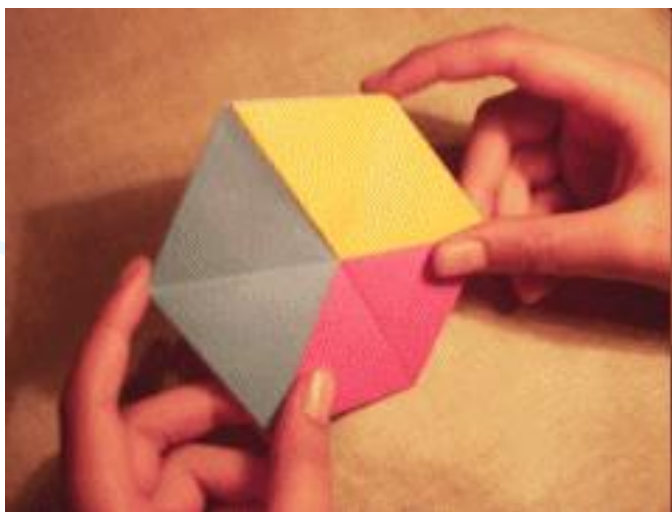
Существует интересная геометрическая игрушка,
которая состоит из треугольников и меняется,
выворачиваясь наизнанку.

Это **ФЛЕКСАГОН**

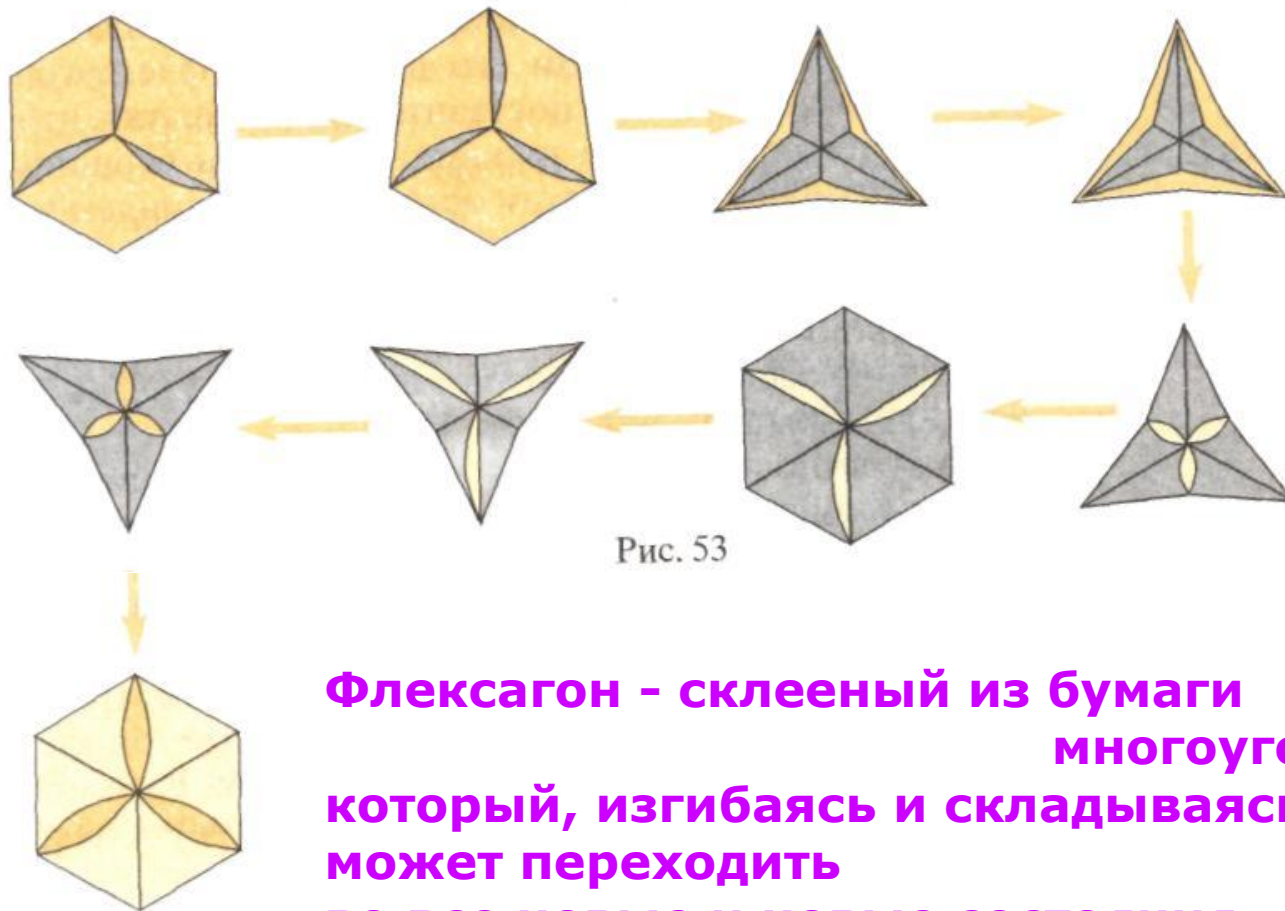
от английского слова to flex,
что означает «складываться, гнуться»

Другими словами, флексагон — гнущийся многоугольник.

Флексагон обладает удивительной способностью –
внезапно менять свою *форму* и *цвет*.



- На рисунке 53 показано постепенное изменение флексагона



**Флексагон - склееный из бумаги
многоугольник,
который, изгибаясь и складываясь,
может переходить
во все новые и новые состояния.**

Это произошло в конце 1939 года.

Как-то раз Артур Х. Стоун, двадцатитрехлетний аспирант из Англии, изучавший математику в Принстоне, обрезал листы американского блокнота, чтобы подогнать их под привычный формат.

Желая немного развлечься, Стоун принялся складывать из отрезанных полосок бумаги различные фигуры.

Одна из сделанных им фигур оказалась особенно интересной!

Перегнув полоску бумаги в трех местах и соединив концы, он получил правильный шестиугольник.

Взяв этот шестиугольник за два смежных треугольника, Стоун подогнул противоположный угол вниз так, что его вершина совпала с центром фигуры.

При этом Стоун обратил внимание на то, что когда шестиугольник раскрывался словно бутон, видимой становилась совсем другая поверхность.

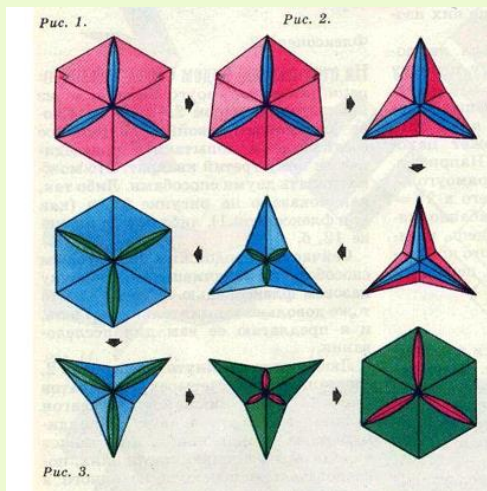
Если бы обе стороны исходного шестиугольника были разного цвета, то после перегибания видимая поверхность изменила бы свою окраску.

Так был открыт самый первый флексагон с тремя поверхностями!

- Поразмыслив над ним ночь, Стоун наутро убедился в правильности своих чисто умозрительных заключений: **оказалось, можно построить и более сложный шестиугольник с шестью поверхностями вместо трех.**

При этом Стоуну удалось найти настолько интересную конфигурацию, что он решил показать свои бумажные модели друзьям по университету.

Вскоре "флексагоны" в изобилии стали появляться на столе во время завтраков и обедов, когда вся компания собиралась вместе.



Для проникновения в тайны "флексологии" был организован "**Флексагонный комитет**".

Кроме Артура Стоуна, в него вошли:

аспирант-математик Бриан Таккермен,

аспирант-физик Ричард Фейнман

и молодой преподаватель математики Джон У. Тьюки.

Постоянные модели были названы гексафлексагонами:

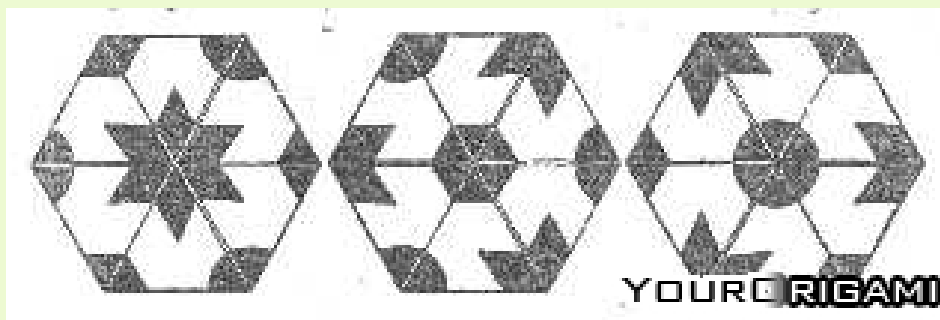
* "гекса" - из-за их шестиугольной формы
(от греческого "гекс", что означает шесть),

* "флексагонами" - из-за их способности складываться
(To flex [англ.] - складываться, сгибаться, гнуться).

Первый построенный Стоуном флексагон был назван

тригексафлексагоном,

так как у него были три поверхности.



Флексагоны - это многоугольники,
сложенные из полосок бумаги
прямоугольной или более сложной, изогнутой формы,
которые

обладают удивительным свойством:

при перегибании флексагонов
их наружные поверхности прячутся внутрь, а
ранее скрытые поверхности неожиданно выходят наружу.



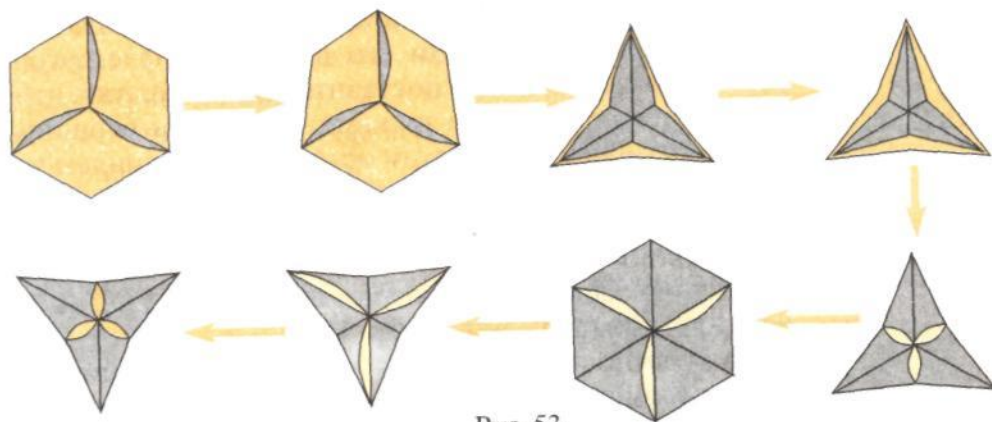


Рис. 53

Конечно, по этому рисунку никак нельзя понять ни что такое флексагон, ни как происходит удивительное превращение.

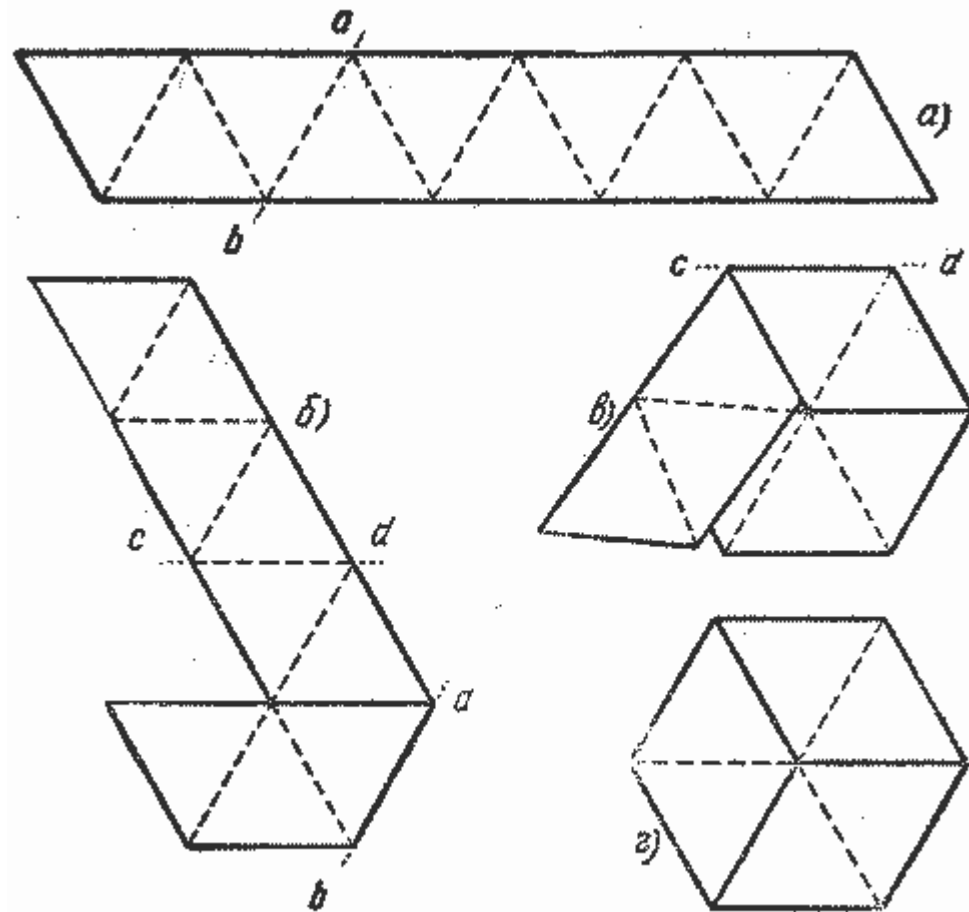
Чтобы в этом разобраться, надо изготовить эту игрушку - **флексагон**.

А для этого надо сделать его развертку.

Она состоит из десяти правильных треугольников, расположенных так, как на рисунке 54.



Рис. 54



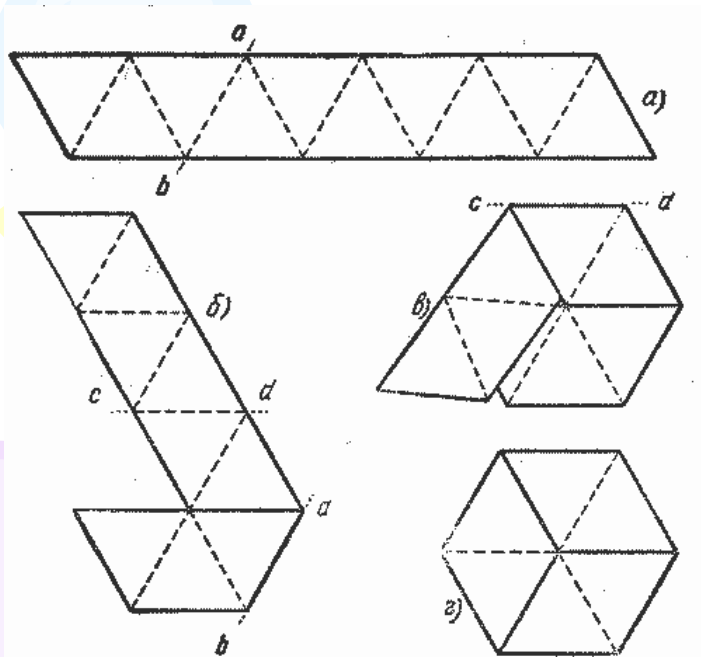
Как делать?

Сначала надо потренироваться!

- **Надо взять длинную бумажную полосу (отношение сторон 1:7 или для удобства даже подлиннее).**

**Для тренировки лучше взять неплотную бумагу (типа тетрадной),
а уже для игрушки - поплотнее (типа альбомной).**

Делаем из полосы бумаги - полосу из треугольников, как в самом верху на схеме.



Затем сворачиваем ее (топологически получается лента Мёбиуса) и склеиваем.

Что такое у вас получится?

Получится шестиугольник.

А теперь приступим к изготовлению Флексагона из плотной бумаги!

- Пусть сторона каждого треугольника равна 4-5 см.
Изготовьте такую полосу и раскрасьте.



Вырежьте полосу и переверните ее так, чтобы верхний край оказался внизу, а нижний - вверху.

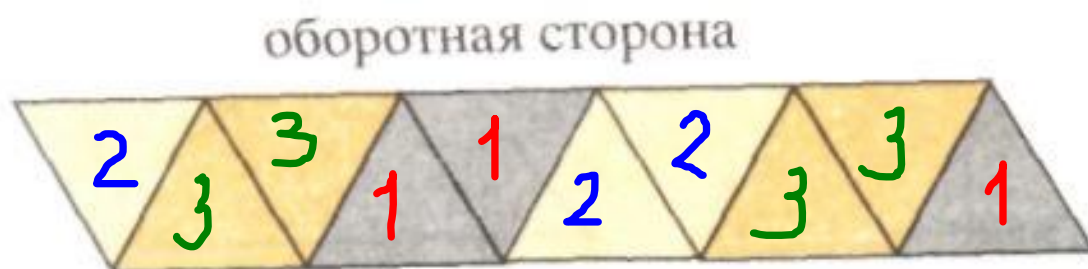
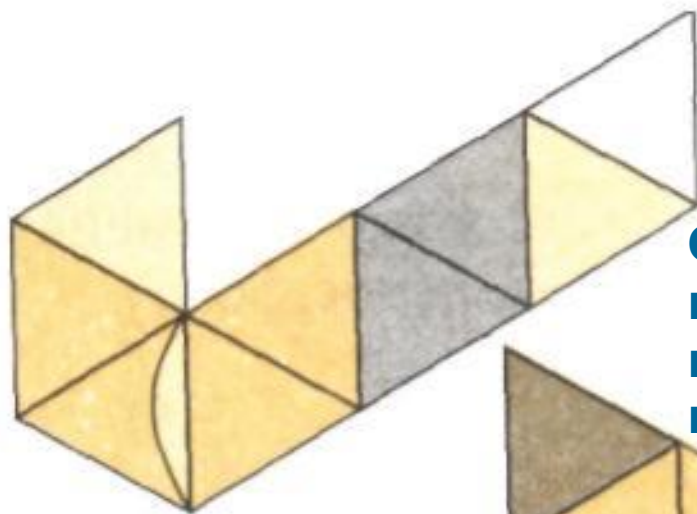


Рис. 54

Перегните полосу по сторонам треугольников и сложите, как показано на рисунке 55.



Оставшийся треугольник подогните вниз, склейте друг с другом две неокрашенные треугольные поверхности

и флексагон готов.



Рис. 55

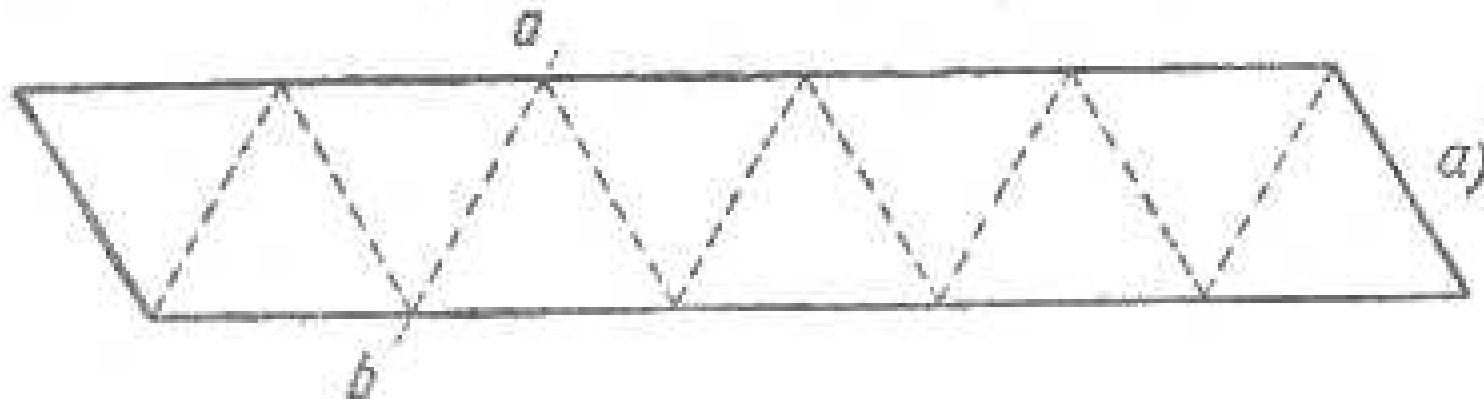
**Эта модель называется –
Тригексафлексагон**

**Еще раз подробно рассмотрим выполнение
Тригексафлексагона**



• Тригексафлексатон

1. складывают из полосы бумаги, предварительно размеченной на **10** равносторонних треугольников:

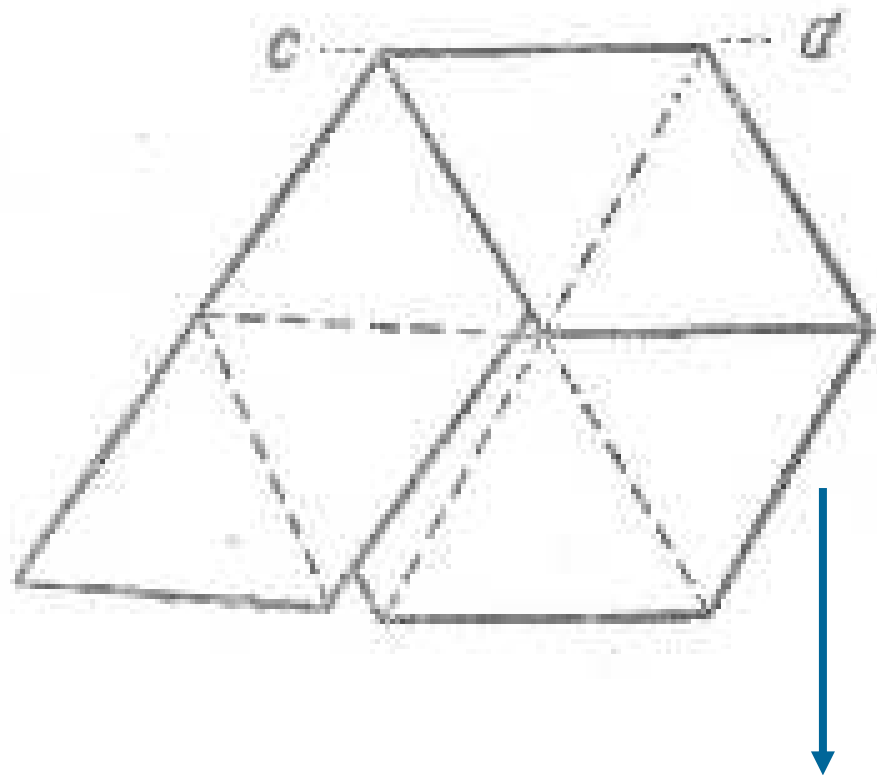
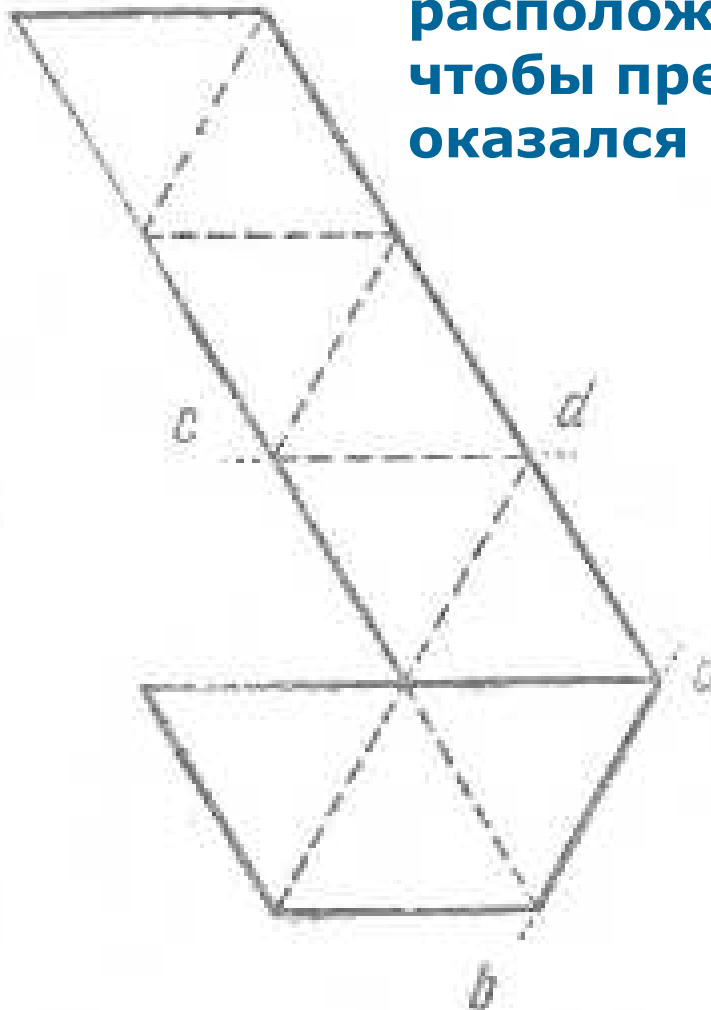


Полоску перегибают по линии **ab** и переворачивают:



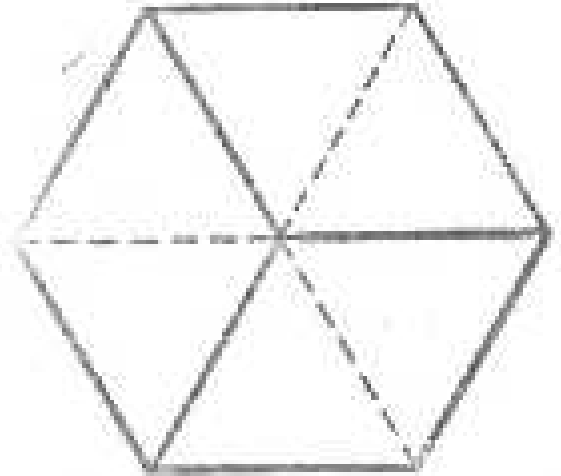
• Тригексафлексатон

2. Перегнув полосу еще раз по линии **cd**, расположим ее концы так, чтобы предпоследний треугольник оказался наложенным на первый:



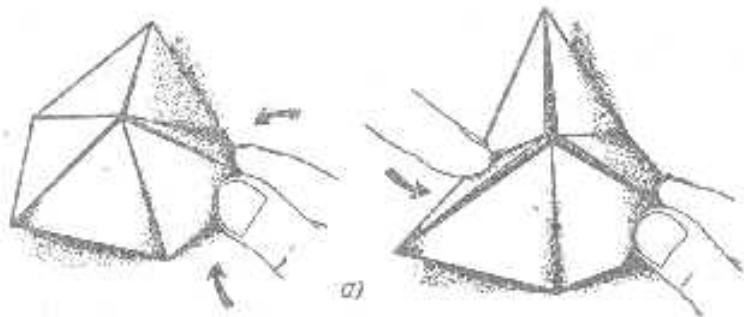
• Тригексафлексатон

3. Последний треугольник нужно подогнуть вниз и прикрепить к оборотной стороне первого треугольника:

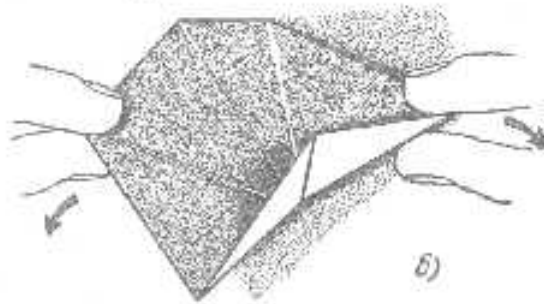


• Сгибание флексагона

Чтобы "открыть" тригексафлексагон, его нужно одной рукой взять за два соседних треугольника примыкающих к какой-нибудь вершине шестиугольника (а), а другой рукой потянуть за свободный край двух противоположных треугольников (б).



Если флексагон не открывается, нужно попробовать ухватить его за два других треугольника.



При открывании шестиугольник выворачивается наизнанку, и наружу выходит поверхность, которая ранее скрывалась внутри.

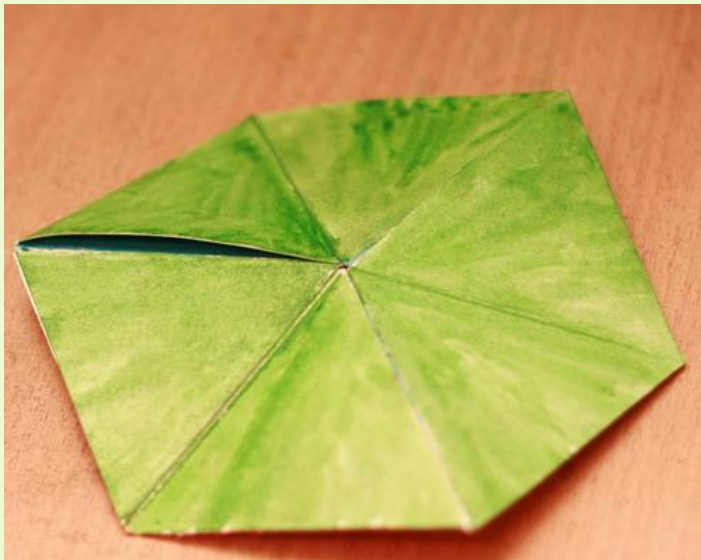
- Получился шестиугольник, который надо раскрасить разными цветами

Например, с одной стороны **красным**, а с другой **синим**.

Если этот шестиугольник чуть-чуть согнуть и развернуть из центра, как бутон, то наружу вылезет **третий цвет**.

Ваш бумажный шестиугольник станет **красный с одной стороны** и белый (некрашенный) с другой.

Белый надо снова покрасить в какой-нибудь красивый третий цвет (например, в **зеленый**).



Теперь можно играть, выворачивая флексагон, поочередно получая:

красно-синий,
красно-зеленый,
сине-зеленый
шестиугольник.

Маленькое математическое чудо!

- Еще более необыкновенное чудо –

гексагексафлексагон.

Это 6 цветный флексагон.

Одновременно, естественно, видно только 2 цвета, но выворачивая его можно цвета комбинировать по-разному.

Склеивать гексагекса потруднее, и полосу вырезать потруднее, чтобы четкие треугольники были
(а это очень важно, иначе ваша игрушка будет "заедать").

Но зато веселья от него на порядок больше!

Если вы любите всякие головоломки,
как я - вам обязательно понравится!

И, как показывает мой опыт, детям от 4 лет тоже.

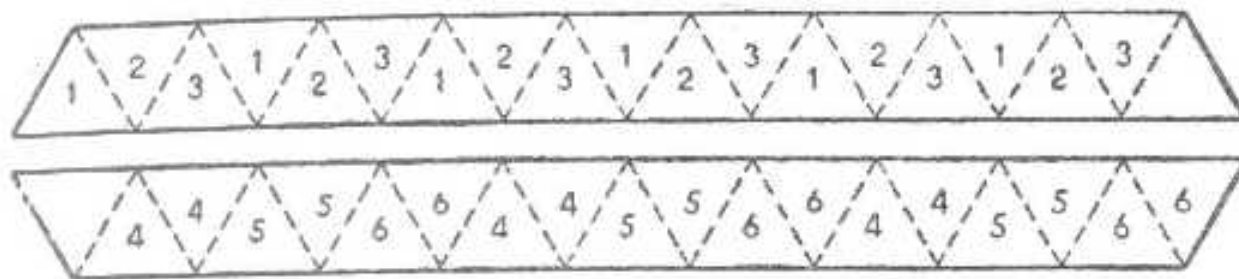
А если у вас пока нет маленьких братишек и сестреночек,
то можно смастерить флексагоны для себя или в подарок друзьям!

• Гексагексафлексгон

Вторая не менее изящная модель Стоуна получила название - **гексагексафлексгон**

(первое "гекса" - шесть - также означает число поверхностей этой модели).

Гексагексафлексгоны складывают из полоски бумаги, разделенной **на 19 равносторонних треугольников**:



Треугольники на одной стороне полоски обозначим цифрами **1, 2, 3** – в соответствии со схемой.

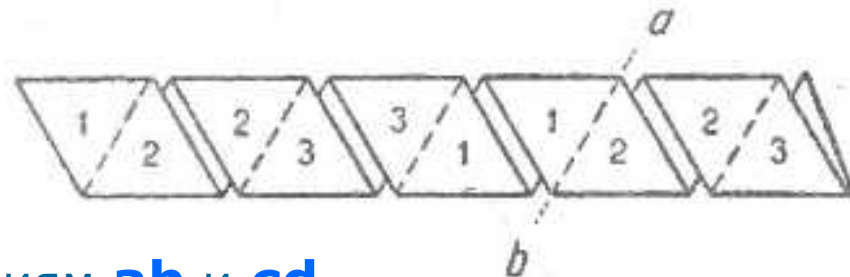
Девятнадцатый (последний) треугольник остается незаполненным.

Треугольники на другой стороне пометим цифрами **4, 5, 6** – так, как показано на схеме.

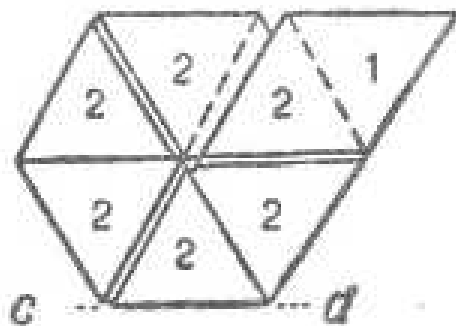
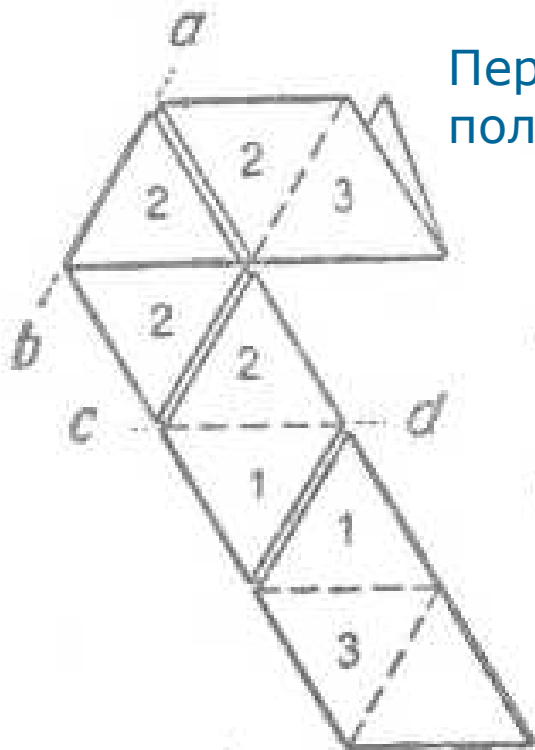
• Гексагексафлексатон

После этого полосу складывают так, чтобы треугольники на ее обратной стороне, имеющие одинаковые цифры, оказались наложенными друг на друга - 4 на 4, 5 на 5, 6 на 6.

В результате у нас получится заготовка гексагексафлексатона, показанная на рисунке:



Перегнув ее по линиям **ab** и **cd**, получим шестиугольник:



Остается лишь подвернуть вниз торчащий вправо пустой треугольник и приклеить его к пустому треугольнику на нижней стороне полосы.

Проделать все эти операции намного легче, чем описать.

A diagram of a hexagonal unit cell. The cell is a rhombus with internal angles labeled '2' and '1'. The axes are labeled 'c' and 'a'.

**В таком виде
тригексафлексатон готов к перегибанию.**

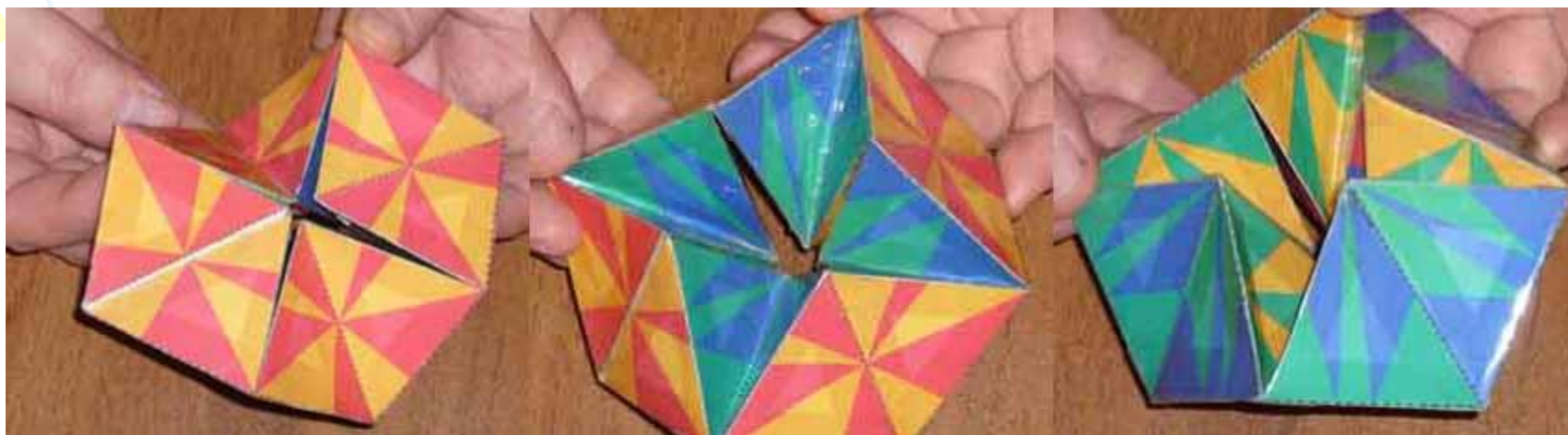
При этом откроются треугольники с цифрами **3** или **5**.

Однако поверхности с цифрами **4**, **5** и **6** найти несколько труднее, чем поверхности с цифрами **1**, **2** и **3**.

Иногда вы будете блуждать по замкнутому кругу:
сколько бы вы ни бились,
перед вами будут открываться лишь одни и те же
уже успевшие надоесть вам поверхности.

Г
Е
К
С
а
Г
Е
К
С
а

флексагон



• Тетрафлексатон

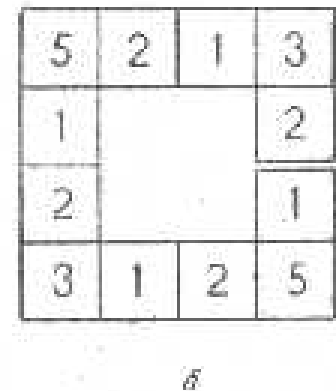
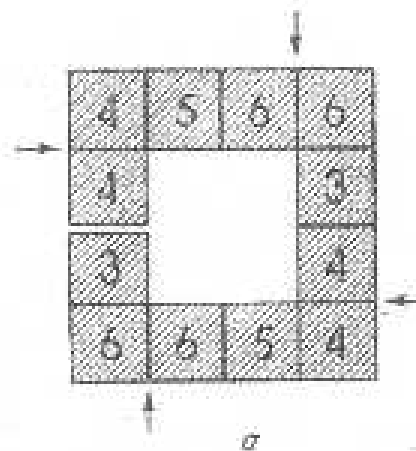
В тесном родстве с **гексафлексатонами** находится множество игрушек, имеющих форму четырехугольника.

Они известны под общим именем **тетрафлексатонов**.

Простейший **тетрафлексатон** имеет три поверхности и поэтому называется **трететрафлексатоном**.

Более интересен **гексатетрафлексатон**, который можно сгибать вдоль двух взаимно перпендикулярных осей.

Для его построения нужно взять полоску бумаги, вырезанную в виде квадратной рамки, разграфить на квадраты и пронумеровать так, как показано на рисунке.



• Тетрафлексатон

После этого полосу бумаги надо перегнуть вдоль всех прямых, которые отделяют друг от друга соседние квадраты.

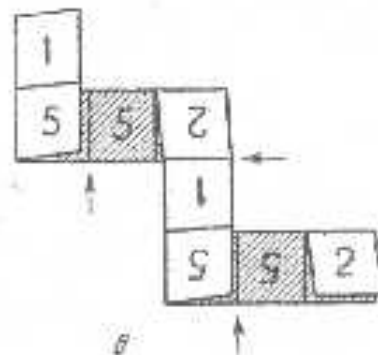
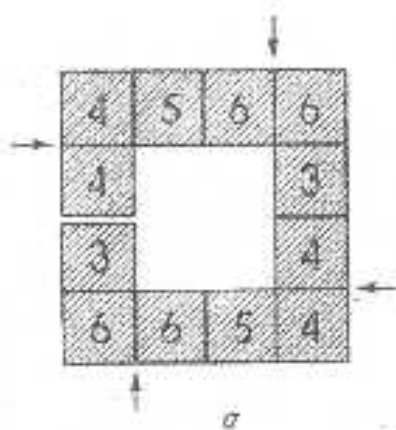
Сгибы должны быть обращены острием вниз.

Наметив все линии сгиба, полосу нужно разгладить и вновь перегнуть вдоль прямых, указанных стрелками на рис. (а).

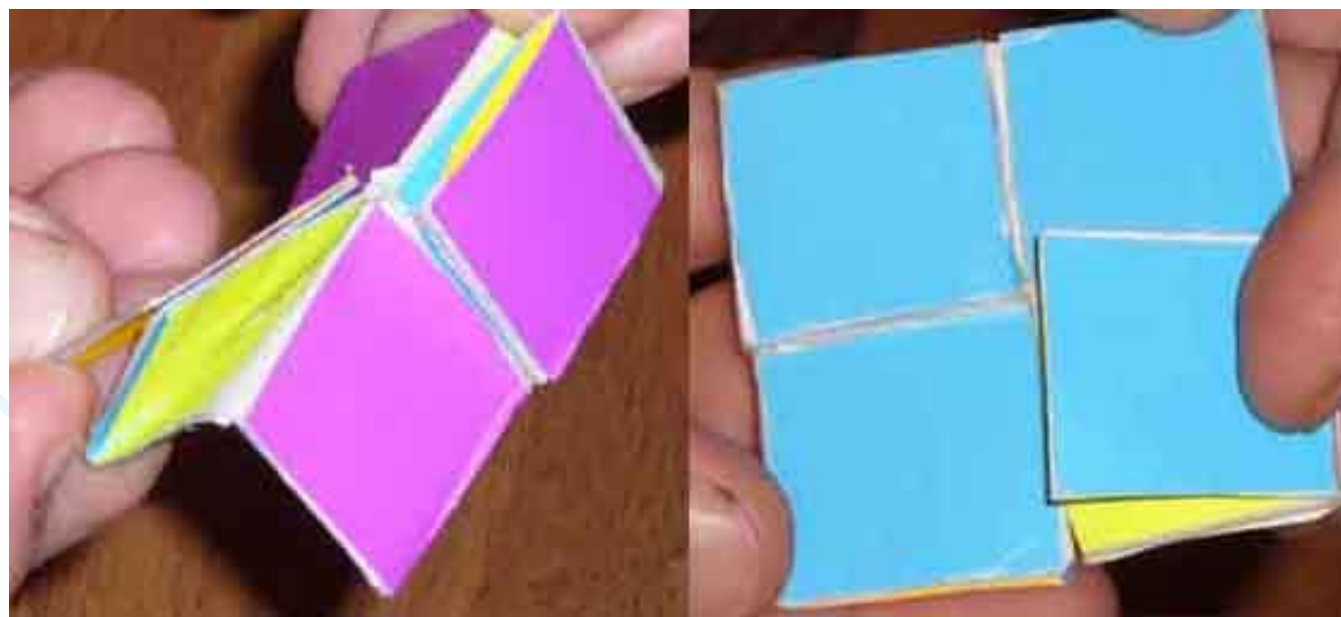
Перевернем полосу и перегнем вдоль прямых, указанных стрелками на рис. (в).

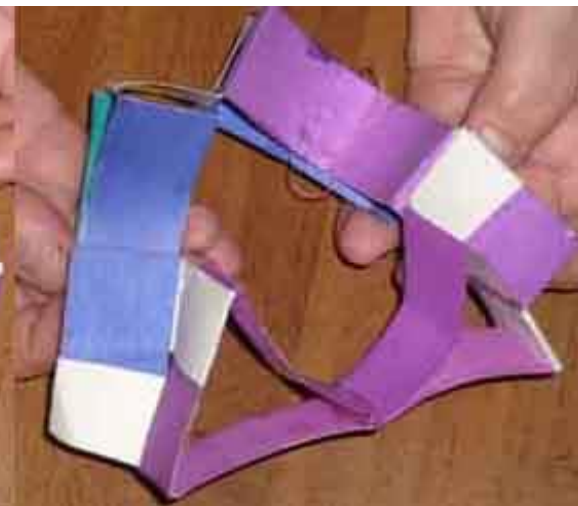
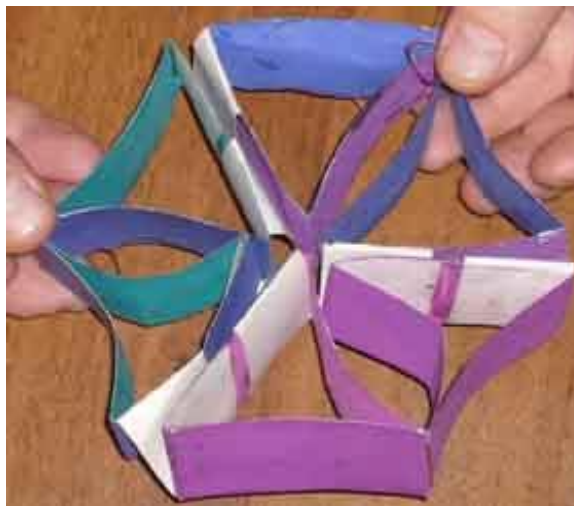
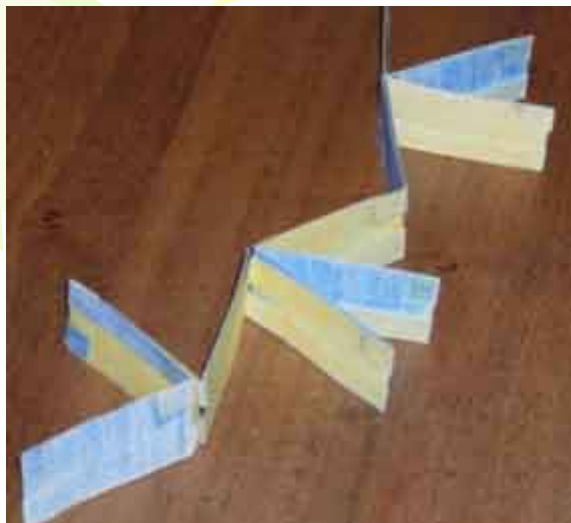
Заправим квадрат с цифрой 3 под квадрат с цифрой 2. В результате все четыре верхних квадрата окажутся помеченными цифрами 2.

К левому верхнему квадрату с цифрой 2 приклеим прозрачную ленту, а другой конец ленты приклеим к квадрату с цифрой 1, который находится с обратной стороны флексагона.



ТЕТРАФЛЕКСАГОН

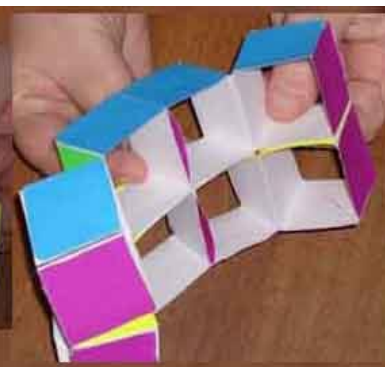
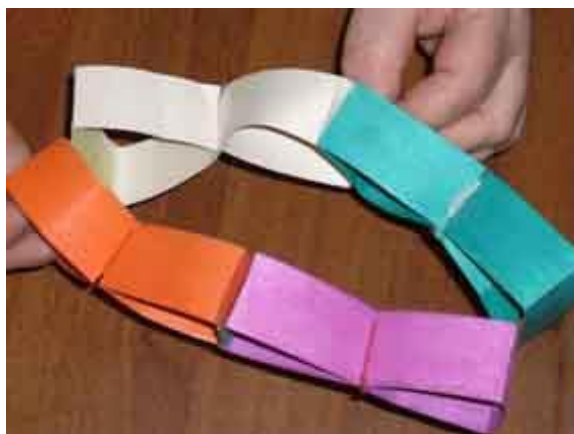




флексагоны

Дом. задание:

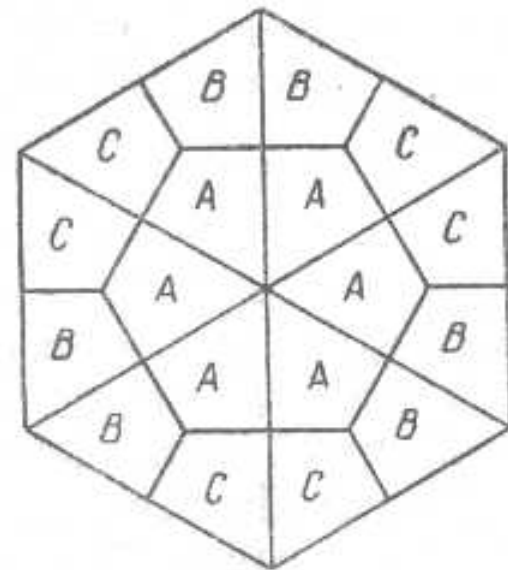
1. Определите вид флексагона
2. Выполните различные модели флексагонов
3. Используйте цветную раскраску в моделях флексагонов



• Раскраска

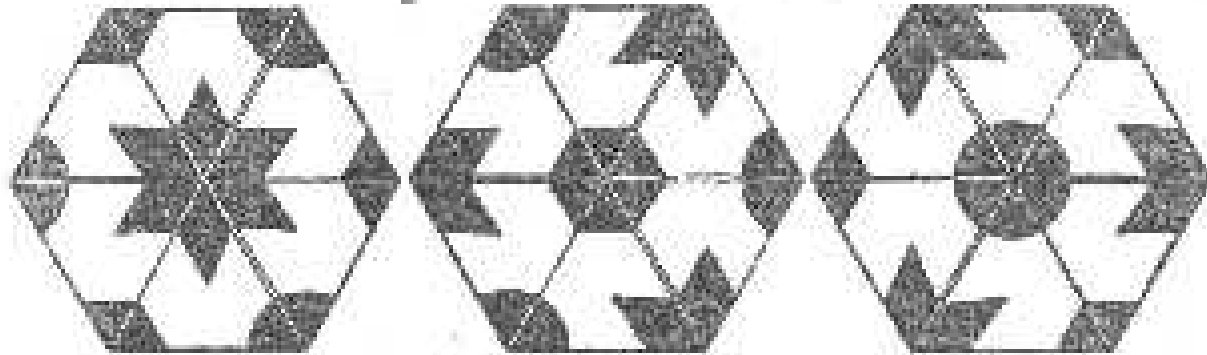
- Существует множество способов раскраски флексагонов, которые приводят к интересным головоломкам и самым неожиданным зрительным эффектам.
- Так, каждая поверхность гексагексафлексагона может появляться по крайней мере в двух различных видах в зависимости от того, как повернуты относительно друг друга образующие ее треугольники.

Например,
если каждую поверхность разделить на части так,
как показано на рисунке,
и выкрасить области А, В и С в различные цвета,
то в центре видимой поверхности могут
появиться и области А
(именно этот случай и показан на рисунке),
и области В, и области С.



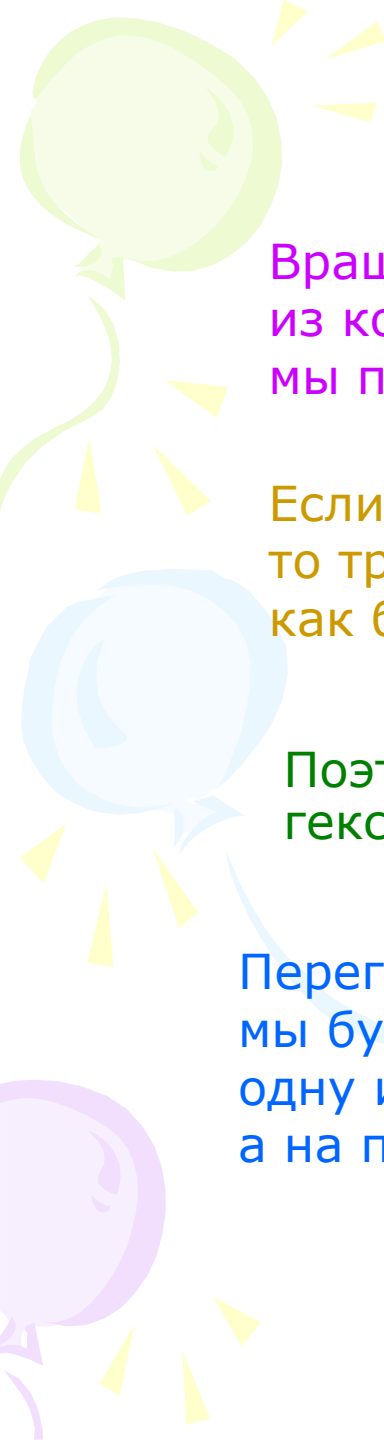
• Раскраска

На следующем рисунке изображен геометрический узор, который, будучи нарисован на одном развороте флексагона, появляется на двух других разворотах, каждый раз принимая иной вид:



Вот пример раскрашенного таким образом гексагексафлексагона:





• Раскраска

Вращая треугольники, из которых составлен правильный шестиугольник, мы получаем 18 различных разновидностей шестиугольников.

Если гексагексафлексгон сделан из прямой полосы бумаги, то три из этих 18 шестиугольников никогда не встретятся нам, как бы мы ни складывали наш флексгон.

Поэтому, можно наклеить на каждый разворот гексагексафлексгона части трех различных картинок.

Перегибая определенным образом флексгон, мы будем видеть по очереди в центре открывшейся поверхности одну из картинок, а на периферии - фрагменты двух других изображений.

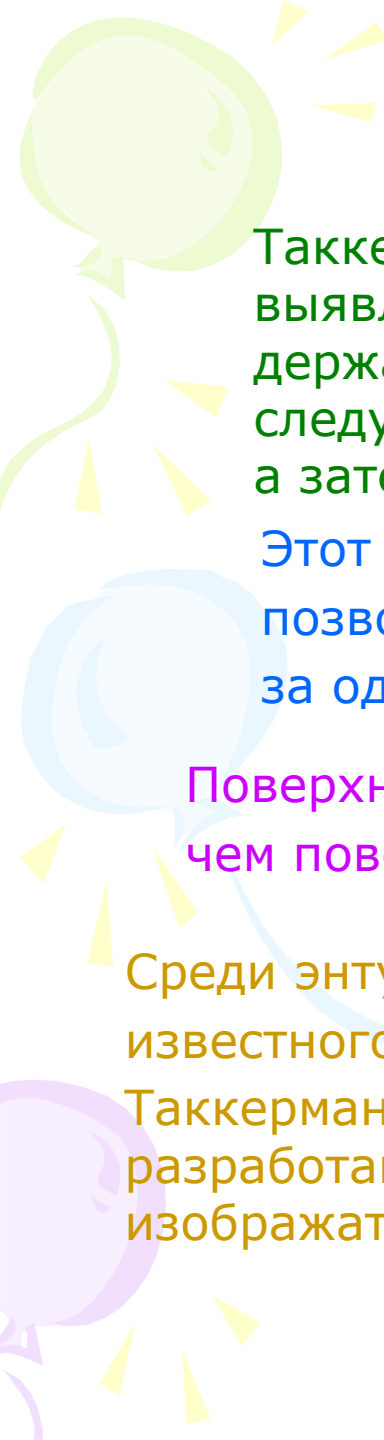
• Раскраска

Один из вариантов раскраски таким образом, чтобы на смежных сторонах треугольников оказались пары человечков.

Перегибая флексагон различным образом, можно получить разные варианты расположения человечков, при этом одни варианты появляются чаще, другие - реже.

Цель состоит в том, чтобы "правильно" расположить всех человечков по парам.





• «Путь Таккермана»

Таккерман довольно быстро нашел простейший способ выявления всех поверхностей любого флексагона: держа флексагон за какой-нибудь угол, следует открывать фигуру до тех пор, пока она "открывается", а затем переходить к следующему углу.

Этот метод, известный как "путь Таккермана", позволяет увидеть все шесть разворотов гексагексафлексагонов за один цикл из 12 перегибаний.

Поверхности с цифрами 1, 2 и 3 будут появляться в три раза чаще, чем поверхности с цифрами 4, 5 и 6.

Среди энтузиастов "флексологии" следует назвать отца Таккермана - известного физика Луи Таккермана.

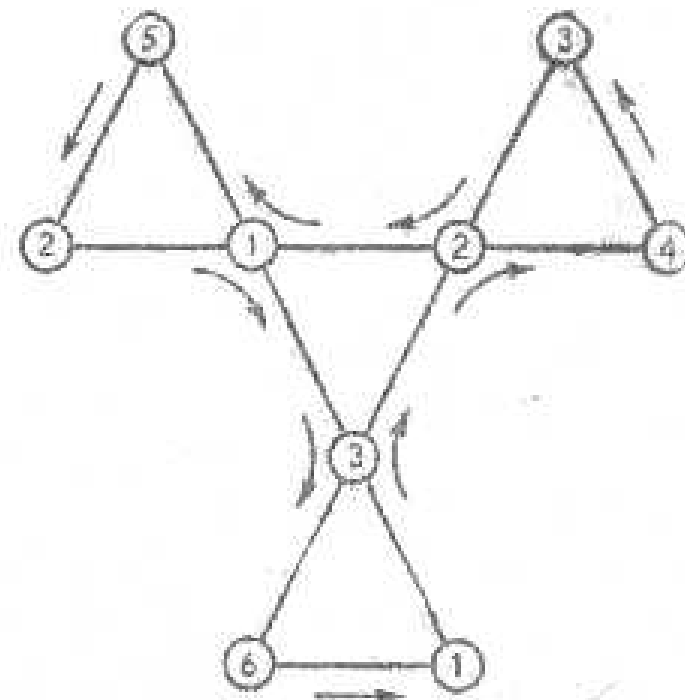
Таккерман старший внес существенный вклад в теорию флексагонов, разработав простой, но эффективный способ изображать путь Таккермана в виде дерева.

• «Путь Таккермана»

Путь Таккермана удобно изображать в виде схемы, показанной на рисунке:

Стрелки указывают, в каком порядке становятся видимыми поверхности флексагона.

Схемы такого типа пригодны для исследования любой разновидности флексагонов.



Если модель перевернуть, то путь Таккермана будет изображаться той же схемой, но направление ее обхода будет противоположным.

• Это интересно

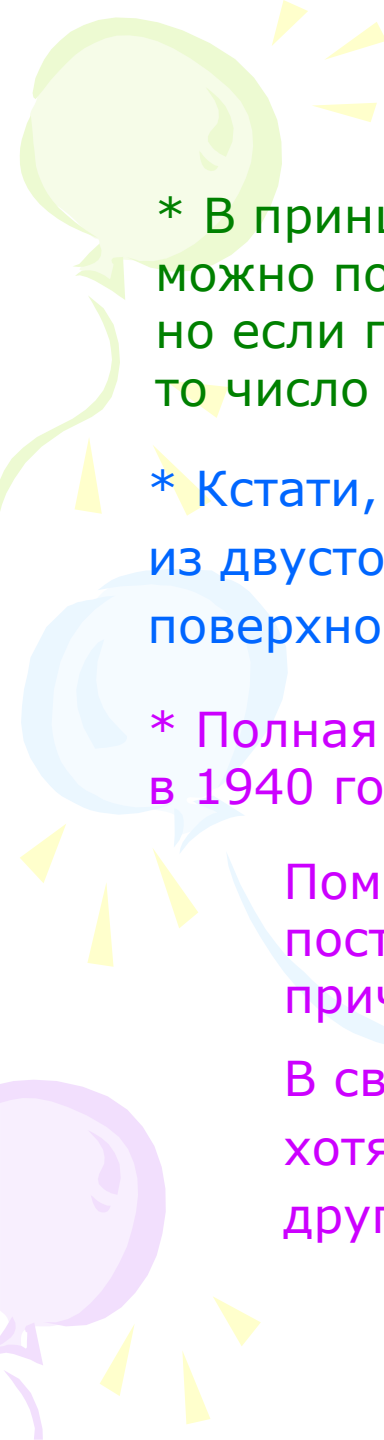
* Комитет обнаружил, что, удлиняя цепочку треугольников, можно делать флексагоны с 9, 12, 15 и даже большим числом поверхностей.

* Таккерман ухитрился даже изготовить действующую модель флексагона **с 48 поверхностями!**

* Он также обнаружил, что из зигзагообразной полоски бумаги (то есть из полоски с зубчатым, а не прямым краем) можно сложить тетрагексафлексагон (с четырьмя поверхностями) и пентагексафлексагон (с пятью поверхностями).

* Существует три различных гексагексафлексагона: первый складывают из прямой полоски бумаги, второй - из полоски, предварительно сложенной в виде шестиугольника, и третий - из полоски, форма которой напоминает лист клевера.

* Разновидностей декагексафлексагона (с десятью поверхностями) намного больше - их 82. Заготовки для всех 82 типов декагексафлексагонов имеют вид бумажных полос, сложенных самым причудливым образом.



• Это интересно

- * В принципе можно построить флексагон с любым числом поверхностей, но если поверхностей больше 10, то число разновидностей флексагонов катастрофически возрастает.
- * Кстати, все флексагоны с четным числом поверхностей делаются из двусторонних полос, а флексагоны с нечетным числом поверхностей, подобно листу Мёбиуса, имеют одну сторону.
- * Полная математическая теория флексагонов была разработана в 1940 году Тьюки и Фейнманом.

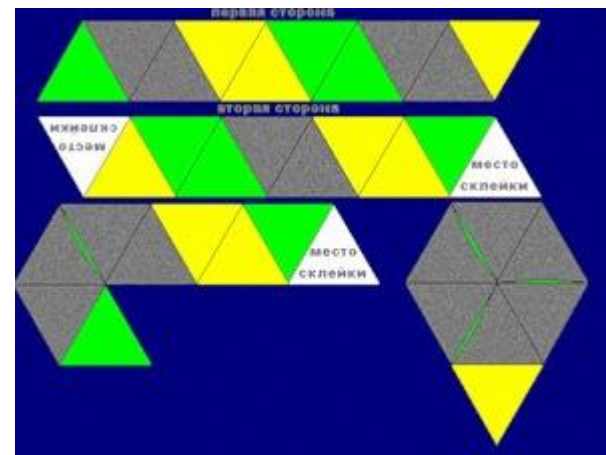
Помимо всего прочего, теория указывает точный способ построения флексагона с любым числом сторон, причем именно той разновидности, которая требуется.

В своем полном виде эта теория так и не была опубликована, хотя отдельные ее части впоследствии были открыты заново другими математиками.

• Подведем итог

Тригексафлексатон складывают из полосы бумаги, предварительно размеченной на 10 равносторонних треугольников.

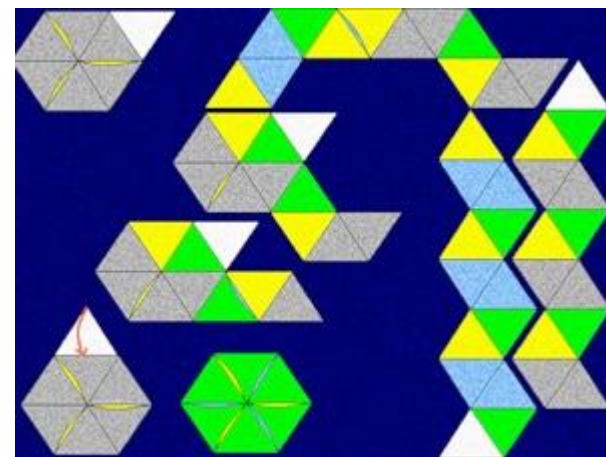
Развертку трифлексатона нужно перерисовать и вырезать из полосы достаточно плотной бумаги шириной около 3-4 см.



Тетрагексафлексатон складывается из полосы бумаги, обе стороны которой изображены справа.

Обратите внимание, что положение клапана на схемах в левых верхнем и нижнем углах разное!

При сборе модели будет нетрудно понять, как осуществить такой переход.



• Подведем итог

Чтобы сложить гексагексафлексгон, берут полоску бумаги (великолепным материалом для изготовления гексагексафлексгонов может служить лента от кассовых аппаратов), разделенную на 19 равносторонних треугольников.

После этого полоску складывают так, чтобы треугольники на ее обратной стороне, раскрашенные в одинаковые цвета, оказались наложенными друг на друга.

Если после всех операций все сделано верно, то все треугольники с одной стороны должны быть желтыми, а с другой - серыми.

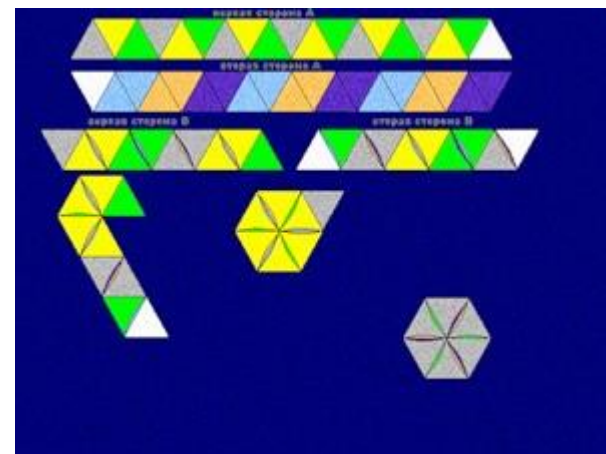
В таком виде тригексафлексгон готов к перегибанию.

Взявшись за два смежных треугольника, согнем шестиугольник по общей стороне этих треугольников и подогнем противоположный угол флексгона.

Перегибая флексгон наугад, вы без труда обнаружите и остальные поверхности.

Однако поверхности голубого, оранжевого и сиреневого цветов найти несколько труднее, чем серые, желтые и зеленые.

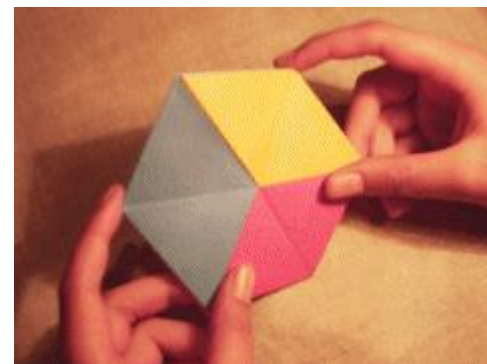
Иногда вы будете блуждать по замкнутому кругу: сколько бы вы ни бились, перед вами будут открываться лишь одни и те же уже успевшие надоесть вам поверхности.



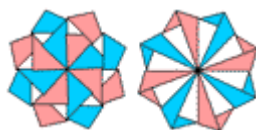
Вопросы – загадки - задания



* Был в руках один квадрат,
N - угольников уж ряд.
Взял листочек в руки он,
а глядишь уж – _____

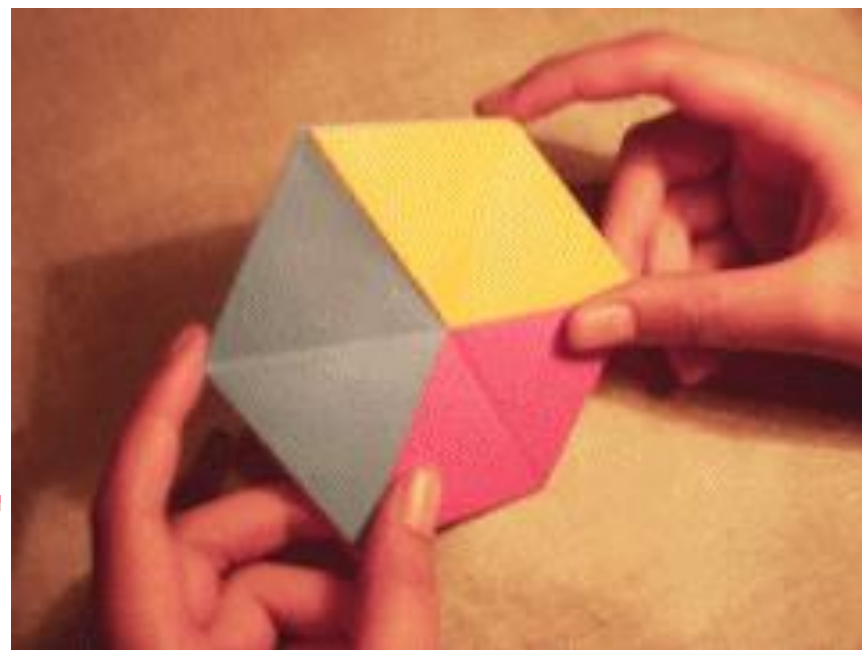
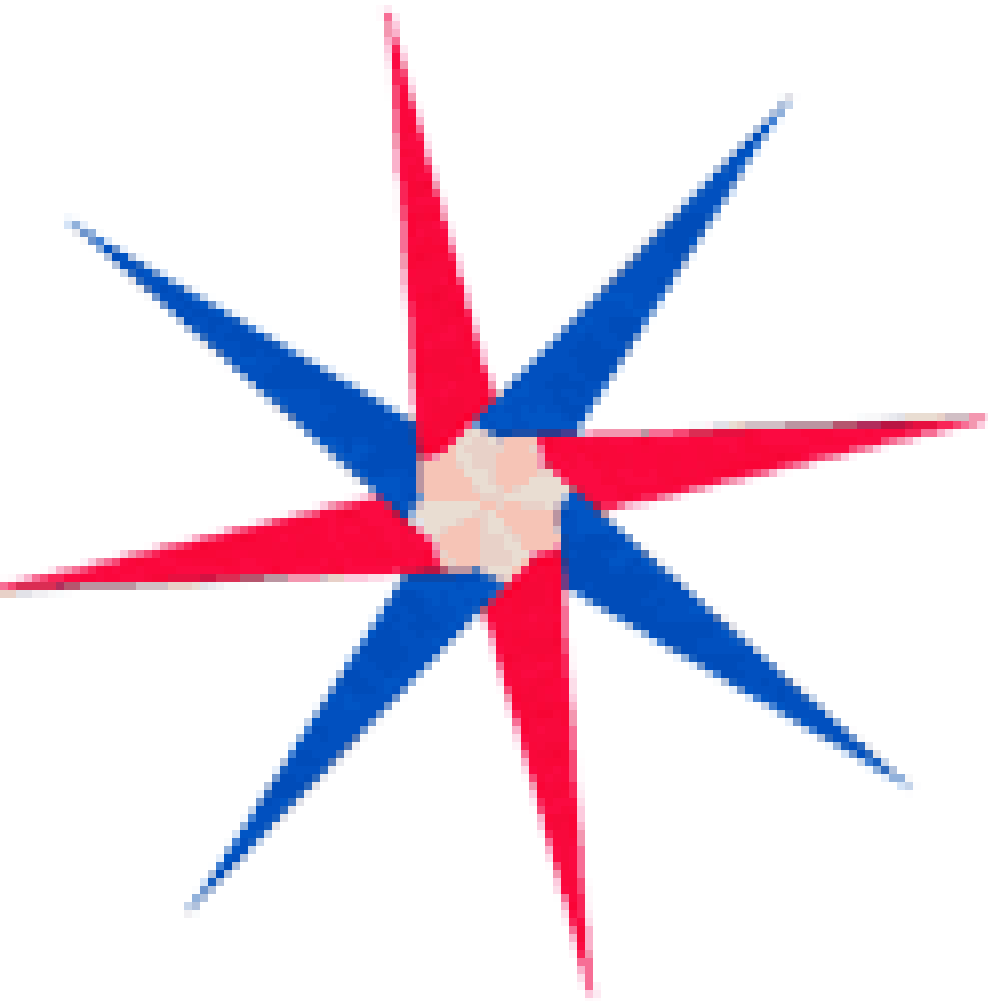


* Прокомментируй рисунки





Спасибо за внимание!



Слинькова А. П.

